26/10/2018

$$\det : M(n \times n; \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$
$$A \to \det A$$
$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{ki} \det(A_{ki})$$

Ανάπτυξη κατά την $1^{η}$ στήλη, A_{ki} είναι ο ελάσσων πίνακας, ο οποίος δημιουργείται από τον A αν διαγράψουμε την k γραμμή και j στήλη.

Γενικά ο A_{ij} δημιουργείται, αν διαγράψουμε την i γραμμή και j στήλη του A. Η ορίζουσα ενός πίνακα υπολογίζεται επαγωγικά στο n.

- $n=1: A=(\alpha) \to \det A = \alpha$
- $n=2: A=\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix} \to \det A = \alpha \cdot \det(\delta) - \gamma \cdot \det(\beta) = \alpha\delta - \beta\gamma$
- $n=3: A=\begin{pmatrix}\alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & j \\ n & \theta & \iota\end{pmatrix} \to \det A = \alpha \det\begin{pmatrix}\varepsilon & j \\ \theta & \iota\end{pmatrix} - \delta \det\begin{pmatrix}\beta & \gamma \\ \theta & \iota\end{pmatrix} + n \det\begin{pmatrix}\beta & \gamma \\ \varepsilon & j\end{pmatrix} =$

$$= \alpha\varepsilon\iota - \alpha\theta j - \delta\beta\iota + \delta\theta\gamma + n\beta j - n\varepsilon\gamma$$

ΠΡΟΣΟΧΗ! για 3x3 μόνο

$$\det\begin{pmatrix}\alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & j \\ n & \theta & \iota\end{pmatrix} = \alpha\varepsilon\iota + \beta j n + \gamma\delta\theta - \gamma\varepsilon n - \alpha\theta j$$

<u>Πρόταση</u>: Αν ο A είναι άνω τριγωνικός τότε η ορίζουσα του είναι το γινόμενο των στοιχείων της κύριας διαγωνίου.

$\det A = \alpha_{11}\alpha_{22}\cdots\alpha_{nn}$

$$A = \begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ 0 & \alpha_{22} & & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_{nn}\end{pmatrix}$$

<u>Απόδ</u>: Με επαγωγή στο n

- $n=1: \det A = \det(\alpha_{11}) = \alpha_{11}$
- $n=2: \det\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} \\ 0 & \alpha_{22}\end{pmatrix} = \alpha_{11}\det(\alpha_{22})$

Υποθέτουμε ότι ισχύει για $n=k$ και θα το δείξουμε για $n=k+1$

$$A=\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ 0 & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$ Άνω τριγωνικός διάστασης $(n-1)$

$\det A = \alpha_{11}\det A_{ij} - \alpha_{12}\det A_{21} + \dots + (-1)\alpha_{n-1}\det(A_{nn})$

$\det A = \alpha_{11}\det A_{ij}$

Από την υπόθεση της επαγωγής έχουμε: $\det A_{ij} = \alpha_{22}\alpha_{33}\dots\alpha_{nn}$

Ιδιότητες

-> (1) Εάν ο A' προέρχεται από την A αφού πολ/ζουμε μια γραμμή με το c, τότε $\det A = c\cdot\det A$

π.χ. $A=\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, $A'=\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ c\gamma & c\delta \end{pmatrix}$

*

$\det A' = a\det(c\delta) - c\gamma\det(\beta) = \alpha c\delta - c\gamma\beta = c(\alpha\delta - \gamma\beta) = c\cdot\det A.$

Αποδ: Με επαγωγή στο n

- $n=1$: $A=(a)$, $A'=(ca)$: $\det A' = c\cdot\alpha = c\cdot\det A$
- $n=2$: Το αποδείξαμε *

Υποθ. ότι ισχύει για κ και θα το δείξουμε για κ+1

$$A=\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \xleftarrow{i} \Rightarrow A' = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \dots & \alpha_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

$A=(\alpha_{ts})$ $\qquad \alpha'_{ts} \rightarrow c\alpha_{is}$, $t=i$

$A=(\alpha'_{ts})$ $\qquad \hookrightarrow \alpha_{ts}$, $t\neq i$

$$\det A' = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \alpha'_{k1} \det(A'_{k1}) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} (-1)^{k+1} \alpha'_{k1} \det(A'_{k1}) + (-1)^{i+1} \alpha'_{i1} \det(A'_{i1})$$

$$= \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} (-1)^{k+1} \alpha_{k1} \det(A'_{k1}) + (-1)^{i+1} c\alpha_{i1} \det(A'_{i1})$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \alpha_{k1}\, c\det(A_{k1}) + (-1)^{i+1} c\alpha_{i1} \det A_{i1} = c\Big(\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} (-1)^{k+1} \alpha_{k1} \det A_{k1} +$$

$$+ (-1)^{i+1} \alpha_{i1} \det(A_{i1})\Big) = c \cdot \det A$$

$A'_{i1} = A_{i1}$

A'_{11} = έχει πολλαπλασιαστεί με c

Απο επαγωγή είναι $(n-1)$ $\det A' = c \cdot \det A$

Το ίδιο ισχύει για όλους τους ελάσσονες πίνακες A'_{k1} όταν $k \neq i$

Πρόταση Αν ο A' προέρχεται από τον A με εναλλαγή δύο γραμμών του, τότε η ορίζουσα του $\det A' = -\det A$

π.χ. $\det A' = \gamma \cdot \det \beta - \alpha \det \delta = \gamma \cdot \beta - \alpha\delta = -\det A$

π.χ.
$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix} \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \end{pmatrix}$$

$$\det A' = \overset{\alpha'_{11}}{\alpha_{31}} \det\begin{pmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{12} & \alpha_{13} \end{pmatrix} - \overset{\alpha'_{21}}{\alpha_{21}} \det\begin{pmatrix} \alpha_{32} & \alpha_{33} \\ \alpha_{12} & \alpha_{13} \end{pmatrix} + \overset{\alpha'_{31}}{\alpha_{11}} \begin{pmatrix} \alpha_{32} & \alpha_{33} \\ \alpha_{22} & \alpha_{23} \end{pmatrix} \overset{(+)}{=}$$

$A'_{11} \xrightarrow{\text{εναλλαγή}} A_{31} \xRightarrow{\text{εναλλαγή}} \det A'_{11} = -\det A_{31}$

$A'_{21} \xrightarrow{\text{εναλλαγή}} A_{21} \xRightarrow{\text{εναλλαγή}} \det A'_{21} = -\det A_{21}$

$A'_{31} \xrightarrow{\text{εναλλαγή}} A_{11} \xRightarrow{\text{εναλλαγή}} \det A'_{31} = -\det_{11}$

$$
\begin{aligned}
(4) &= -\alpha_{31}\det A_{31} + \alpha_{21}\det A_{21} - \alpha_{11}\det A_{11} \\
&= -\alpha_{11}\det A_{11} + \alpha_{21}\det A_{21} - \alpha_{31}\det A_{31} \\
&= -(\alpha_{11}\det A_{11} - \alpha_{21}\det A_{21} + \alpha_{31}\det A_{31}) \\
&= -\det A.
\end{aligned}
$$

$A = (\alpha_{ts})$

$A' = (\alpha'_{ts})$ όπου έχουμε εναλλάξει την 1-γραμμή με την i-γραμμή

$r_1 \leftrightarrow r_i$

$$
\begin{pmatrix}
\alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\
\alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\
\alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \cdots & \alpha_{in} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn}
\end{pmatrix}
\to
\begin{pmatrix}
\alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \cdots & \alpha_{in} \\
\alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\
\alpha_{11} & \alpha_{12} & & \alpha_{1n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn}
\end{pmatrix}
\qquad
\alpha'_{ts} = \begin{cases} \alpha_{ts} & \text{όταν } t \neq 1, i \\ \alpha_{is} & \text{» } t = 1 \\ \alpha_{1s} & \text{» } t = i \end{cases}
$$

$$\det A' = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \alpha'_{k1} \det A'_{k1} = \sum_{\substack{k=2 \\ k \neq 1, i}}^{n} (-1)^{k+1} \alpha_{k1} \det A'_{k1} + (-1)^{1+1} \alpha'_{11} \det A'_{11} +$$

$\alpha_{k1}(-\det A_{k1}) \qquad \alpha_{i1}((-1)^{i-1}\det A_{i1})$

$(-1)^{i+1} \alpha'_{i1} \det A'_{i1}$

$\alpha_{11}(-1)^{i-2}\det A_{11}$

$$= \sum_{\substack{k=2 \\ k \neq i, 1}}^{n} (-1)^{k+1} \alpha_{k1} \det A_{k1} + (-1)^{i+1+i-1} \alpha_{i1} \det A_{i1} + (-1)^{i+1+i-2} \alpha_{11} \det A_{i1} = -\det A.$$

$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{k1} \det A_{k1}$

π.χ. $\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{εναλλαγή}}{=} -\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -1$

$\det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -1 \cdot \det I = -1$

ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 2/11/2018

1) Αν ο A' δημιουργείται από τον A με πολ/σμό γραμμής με c, τότε $\det A' = c \det A$

Πόρισμα: Αν ο A είναι μια μηδενική γραμμή, η ορίζουσα του είναι 0

Πόρισμα: Αν ο A είναι $n\times n$ και ο A' δημιουργείται από τον A με πολ/μό κάθε γραμμής με c τότε $\det A' = c^n \det A$

2) Αν εναλλάσουμε δύο γραμμές του A, τότε η ορίζουσα πολ/ται με $-$.

Πόρισμα: Αν ο A έχει 2 γραμμές ίσες, τότε η ορίζουσα του είναι 0.

Απόδ: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ η $1^{η}$ και η i είναι ίσες

Αν ο A' προέρχεται από τον A με εναλλαγή της $1^{ης}$ με την i, τότε παραμένει ίδιος.

$$= \det A' = -\det A \atop \| \atop \det A \Big\} \Rightarrow \det A = -\det A \Rightarrow 2\det A = 0 \Rightarrow \det A = 0$$

3) Αν ο A' δημιουργείται από τον A με πρόσθεση κάποιας γραμμής σε κάποια άλλη, τότε η ορίζουσα δεν αλλάζει
$\det A' = \det A$

π.χ. $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$ $\quad \Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} b_{11}+\gamma_{11} & b_{12}+\gamma_{12} & b+\gamma_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$ $\quad \underline{\underline{A \neq B+\Gamma}}$

$\det A = (b_{11}+\gamma_{11}) \det A_{11} - b_{21} \det A_{21} + b_{31} \det A_{31} \overset{*}{=}$

$A_{11} = \begin{pmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = B_{11} = \Gamma_{11}$

$A_{21} = \begin{pmatrix} b_{12}+\gamma_{12} & b_{13}+\gamma_{13} \\ b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \neq B_{21} = \begin{pmatrix} b_{12} & b_{13} \\ b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$

$A_{31} = \begin{pmatrix} b_{12}+\gamma_{12} & b_{13}+\gamma_{13} \\ b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} \neq B_{31}$

$* = b_{12} \det A_{12} + \gamma_{11} \det A_{11}$

$\det A_{21} = b_{12}b_{33} + \gamma_{12}b_{33} - b_{13}b_{32} - \gamma_{13}b_{32}$

$\det A_{31} = b_{12}b_{23} + \gamma_{12}b_{23} - b_{13}b_{22} - \gamma_{13}b_{22}$

$(*) = b_{11}\det A_{11} + \gamma_{11}\det A_{11} - b_{21}b_{12}b_{33} - b_{21}b_{12}b_{33} + b_{21}b_{13}b_{32} - b_{21}\gamma_{13}b_{32} +$
$+ b_{31}(b_{12}b_{23} + \gamma_{12}b_{23} - b_{13}b_{22} - \gamma_{13}b_{22})$
$= \det B + \det \Gamma \neq \det(B+\Gamma)$

<u>Πρόταση</u>: Αν 2 πίνακες B, Γ έχουν όλες τις γραμμές τους ίδιες εκτός από την i και ο A έχει τις κοινές γραμμές των B και Γ και η i-γραμμή B και Γ, τότε $\det A = \det B + \det \Gamma$

ΠΡΟΣΟΧΗ Δεν έχουμε $A = B + \Gamma$ και δεν ισχύει $\det(B+\Gamma) = \det B + \det \Gamma$

3) Αν ένας πίνακας A' δημιουργείται από τον A με πρόσθεση πολ/σιου της i-γραμμής του στην j, τότε $\det A' = \det A$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \end{matrix} \qquad B = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ ca_{i1} & \cdots & ca_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\det B = c \cdot \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = c \cdot 0 = 0,$$ (ορίζουσα πίνακα με 2 ίδιες γραμμές)

Από το προηγούμενο $\det A' = \det A + \det B = \det A + 0 = \det A$.